MATHEMATIQUES 2

T. TA

Le problème se compose d'une partie Algèbre et d'une partie Géométrie indépendantes.
Dans l'ensemble du problème, on note **R** le corps des réels et **N** l'ensemble des entiers naturels.

ALGEBRE

Le but du problème est de construire des matrices de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R})$ ayant leurs valeurs propres et leur diagonale imposées. La première partie est indépendante des deux autres.

Première partie

Soit $E = \mathbf{R}_{2n}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynomes de degré au plus 2n, avec $n \in \mathbf{N}$.
Si $P \in E$, P' désigne sa dérivée.

On considère $\Phi : P \mapsto \Phi(P)$ avec $\Phi(P)(X) = (\frac{1}{4} - X^2)\ P'(X) + 2n\ X\ P(X)$.

I.1. Montrer que Φ définit un endomorphisme de E.

I.2. On considère l'équation différentielle

(E_λ) $(\frac{1}{4} - x^2)\ y' + (2\ n\ x - \lambda)\ y = 0$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$.

a. Résoudre E_λ sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

b. A quelle condition sur λ, E_λ possède-t-elle une solution polynomiale non nulle ? Ce polynome est-il solution de E_λ sur **R** ?

c. En déduire les valeurs propres et sous-espaces propres de Φ.

d. Φ est-elle diagonalisable ?

I.3. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2, ..., X^{2n})$ la base canonique de E. Déterminer la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

I.4. En utilisant la matrice identité, déterminer une matrice dont les valeurs propres sont les entiers (0, 1, 2, ..., 2n) et dont les élements diagonaux sont tous égaux.

I.5. Construire un endomorphisme Ψ de E tel que Ψ (P) s'exprime en fonction de P et P' et admettant {0, 1, 2, ..., 2n} comme valeurs propres.

I. 6. Construire un endomorphisme Λ de E tel que Λ(P) s'exprime en fonction de P, P' et P'' et admettant $\{0, 1, 2^2, 3^2, ..., (2n)^2\}$ comme valeurs propres.

Deuxième partie

Dans cette partie, on cherche à déterminer les réels α_1, α_2, α_3, α_4 tels que

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ ait une valeur propre unique λ d'ordre 5.

I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_5$ (**R**).

II.1. Déterminer alors la valeur propre unique λ de A et le polynome caractéristique de A noté P(X).

II.2. En développant det (A-X I) suivant la dernière colonne, montrer l'égalité des fractions rationnelles:

$$\frac{(X-2)^5}{(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)} = X + \frac{\alpha_1}{X-1} + \frac{\alpha_2}{X-2} + \frac{\alpha_3}{X-3} + \frac{\alpha_4}{X-4}$$

II.3. Calculer α_2 puis calculer α_1, α_3, et α_4. Montrer qu'alors A répond au problème posé.

II.4. Déterminer le sous-espace propre de A.

Troisième partie

On cherche maintenant 2n réels α_1, α_2, ..., α_{2n} tels que la matrice $A \in \mathcal{M}_{2n+1}$ (**R**), ait une valeur propre unique d'ordre (2n+1).

$$A=\begin{bmatrix} 2n & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2n} \\ 0 & 2n-1 & \cdots & 0 & \alpha_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

I désigne maintenant la matrice identité de $\mathcal{M}_{2n+1}$ (**R**) et $n \in \mathbf{N}$.

III.1. Déterminer la valeur propre unique et le polynome caractéristique de A. On rappelle que $\sum_{k=1}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2}$.

III.2. Développer det (A-X I) suivant la dernière colonne. On montrera que le coefficient de α_k est $\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{2n} (i - X)$.

III.3. En utilisant la fraction rationnelle $\frac{(X-n)^{2n+1}}{(X-1)(X-2)...(X-2n)}$, montrer que

$\alpha_i = (-1)^{i-1} \frac{(n-i)^{2n+1}}{(i-1)!\,(2n-i)!}$. (avec la convention 0! = 1).

III.4. Montrer que la dimension de l'unique sous-espace propre est 1. On cherche un vecteur de ce sous-espace propre sous la forme $\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_{2n} \end{pmatrix}$ avec $\beta_{2n} = 1$.

On cherchera d'abord β_0, β_1, ..., β_{n-1}, β_{n+1}, ..., β_{2n} puis β_n sans remplacer les α_i par leur valeur obtenue au III.3.

GEOMETRIE

E est l'espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Première partie: Etude de deux courbes

I.1. On considère dans E la courbe C paramétrée par

$$\begin{cases} x = 2\,(t - \frac{1}{t}) \\ y = 5 \\ z = 2\,(t + \frac{1}{t}) \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbf{R}^*.$$

a. Etudier et tracer C dans le plan $(O_1, \vec{i}, \vec{k})$ avec $O_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On prendra comme unité 1 cm.

b. Quelle est la nature de cette courbe ?

I.2. On considère dans E la courbe Γ paramétrée par

$$\begin{cases} x = \dfrac{10\cos(\theta) - 4}{\sqrt{3}} \\ y = 5\sin(\theta) \\ z = \dfrac{5\cos(\theta) - 8}{\sqrt{3}} \end{cases} \qquad \text{avec } \theta \in \mathbf{R}.$$

a. Montrer que Γ est plane. On donnera une équation du plan contenant Γ.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la projection σ de Γ sur le plan yOz, dans le repère $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

Etudier et tracer cette courbe σ. On prendra comme unité 1 cm.

c. Quelle est la nature de σ ? En déduire celle de Γ. Montrer que Γ possède un centre de symétrie qu'on déterminera.

I.3. Déterminer l'intersection de C et Γ.

Deuxième partie

II.1. Déterminer l'équation cartésienne de Σ, surface de révolution d'axe Oz contenant C. Identifier Σ.

II.2. Déterminer l'équation cartésienne de Σ', surface de révolution d'axe Oz contenant Γ. Comparer Σ et Σ'.

Troisième partie

III.1. Déterminer l'équation cartésienne du cylindre de direction $\vec{k}$ circonscrit à Σ, appelé S. Préciser une directrice de S.

III.2. Déterminer le plan tangent $\mathcal{P}$ à S au point (3, 0, 0). Montrer que $(\mathcal{P} \cap \Sigma)$ est constitué de deux courbes très simples que l'on précisera.

III.3. Soit P le plan tangent à S en un point quelconque M. Déterminer la nature géométrique de l'intersection de P et de Σ.